ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\cos 2x}{x-2i}\,dx.$$

2. Функция $u\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ является решением задачи Коши

$$y^2\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad u\in\mathbb{R},$$

$$u(x,0)=x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Найти функцию $u(x,y)$ и вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{\gamma}u(x,y)\,dx,$$

где кривая γ — это граница области $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \substack{x^2+y^2<1,\\ x>0}\right\}$, ориентированная против часовой стрелки.

3. Найти минимум функционала

$$J(u)=\int\limits_0^1(x+1)\left(u'(x)\right)^2\,dx,\quad u\in C^2[0,1],$$

на множестве $M=\left\{\ u\in C^2[0,1]\ \middle|\ u(0)=0,\ \ u(1)=1\ \right\}$, и указать экстремаль, доставляющую минимум.

4. Три лыжника независимо спускаются с горы, каждый с вероятностью $\frac{1}{4}$ может упасть, а упав дважды, сходит с трассы. Найти вероятность того, что не менее двух лыжников дойдёт до финиша, если известно, что каждый из них хоть раз упал.

5. Решить задачу Коши

$$\frac{u(x)u''(x)}{u'(x)}=u'(x)+1,$$

$$u(0)=1,\quad u'(0)=1.$$

6. Решить уравнение

$$u(x) = i\int\limits_0^x u(t)\,dt - i\int\limits_x^\pi u(t)\,dt + \exp(2ix), \quad 0 \le x \le \pi.$$

7. Решить задачу Коши для уравнения Шрёдингера

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(0,x) = x\exp(ix), \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \Delta u(t,x,y), \quad t > 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(0,x,y) = \exp(-(x-y)^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Решить задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y,z)}{\partial t^2} = \Delta u(t,x,y,z), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u(0,x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\frac{\partial u(0,x,y,z)}{\partial t} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x-y-z)}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

10. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1,$$

$$u(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1} = x(x-y)^2.$$

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

ЗАДАЧА	ОТВЕТ
1.	$\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{\cos 2x}{x-2i}\,dx = \frac{\pi i}{e^4}$ $\int\limits_{-R}^{R} \frac{\exp(2ix)}{x-2i}\,dx \to 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=2i} \frac{\exp(2iz)}{z-2i} = \frac{2\pi i}{e^4}, \quad \int\limits_{-R}^{R} \frac{\exp(-2ix)}{x-2i}\,dx \to 0$
2.	$u(x,y) = x - \dfrac{y^3}{3}, \qquad \oint\limits_{\gamma} u(x,y)\,dx = \dfrac{\pi}{8}$
3.	$u_*(x) = \log_2(x+1), \qquad J(u_*) = \dfrac{1}{\ln 2}$
4.	$\frac{27}{32} = P(A_2\|B) + P(A_3\|B) = \frac{P(A_2B)+P(A_3B)}{P(B)} = \frac{27+27}{64},$ A_k — k лыжников финишировало, B — каждый лыжник хоть раз упал, $P(A_2B) = 3\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{27}{4^6}, \quad P(A_3B) = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{4^6},$ $P(B) = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{64}{4^6}$
5.	$u(x) = \dfrac{\exp(2x)+1}{2} = \exp(x)\,\mathrm{ch}(x)$

ЗАДАЧА	ОТВЕТ
6.	$$u(x) = (1 - i\pi + 2ix)\exp(2ix),$$ $$u'(x) = 2iu(x) + 2i\exp(2ix), \quad u(0) + u(\pi) = 2$$
7.	$$u(t,x) = (2t + x)\exp\big(i(t + x)\big)$$
8.	$$u(t,x,y) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{8t+1}\right)}{\sqrt{8t+1}}$$ $$u(t,x,y) = f(t, x-y), \quad f_t(t,\xi) = 2f_{\xi\xi}(t,\xi), \quad f(0,\xi) = \exp(-\xi^2),$$ $$f(t,\xi) = \frac{A}{\sqrt{8\pi(t+\alpha)}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{8(t+\alpha)}\right), \quad \xrightarrow{A=\sqrt{\pi},\ \alpha=\frac{1}{8}} \quad f(t,\xi) = \frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{8t+1}\right)}{\sqrt{8t+1}}$$
9.	$$u(t,x,y,z) = \frac{\operatorname{th}\left(x-y-z+\sqrt{3}t\right) - \operatorname{th}\left(x-y-z-\sqrt{3}t\right)}{2\sqrt{3}}$$ $$u(t,x,y,z) = f(t, x-y-z),$$ $$f_{tt}(t,\xi) = 3f_{\xi\xi}(t,\xi), \quad f(0,\xi) = 0, \quad f_t(0,\xi) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\xi},$$ $$f(t,\xi) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int\limits_{\xi-\sqrt{3}t}^{\xi+\sqrt{3}t}\frac{d\eta}{\operatorname{ch}^2\eta} = \frac{\operatorname{th}\left(\xi+\sqrt{3}t\right) - \operatorname{th}\left(\xi-\sqrt{3}t\right)}{2\sqrt{3}}$$
10.	$$u(t,x,y) = r\cos\varphi - \frac{r}{2}\sin\varphi - \frac{r^3}{2}\sin 3\varphi = \frac{y^3 - 3x^2y + 2x - y}{2},$$ где $\quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

Стоимость каждой задачи — два очка.